

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu
Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

MATEMATIKA S APLIKÁCIAMI

3. ČASŤ

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
a kolektív

2023

NÁZOV UČEBNICE:

MATEMATIKA S APLIKÁCIAMI

3. ČASŤ

AUTORI:

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc. (2,71 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

RNDr. Mária Farkašová, PhD. (1,59 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

Mgr. Radomíra Hornyák Gregáňová, PhD. (1,18 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

PaedDr. Tomáš Pechočiak, PhD. (0,75 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

Mgr. Vladimír Matušek, PhD. (0,75 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

Mgr. Norbert Kecskés, PhD. (0,73 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD. (0,70 AH)

Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre

Fakulta ekonomiky a manažmentu, Ústav štatistiky, operačného výskumu a matematiky

RECENZENTI:

prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.

FPV UKF Nitra, Katedra matematiky

doc. RNDr. Monika Božíková, PhD.

TF SPU Nitra, Ústav elektrotechniky, automatizácie, informatiky a fyziky

Schválila rektorka Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre dňa 11. 9. 2023
ako vysokoškolskú učebnicu pre študentov SPU v Nitre.

© doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.,
RNDr. Mária Farkašová, PhD., Mgr. Radomíra Hornyák Gregáňová, PhD.,
PaedDr. Tomáš Pechočiak, PhD., Mgr. Vladimír Matušek, PhD.,
Mgr. Norbert Kecskés, PhD., Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD.

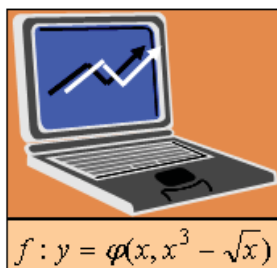
ISBN 978-80-552-2638-5

Obsah

Úvod	7
Použité symboly a označenia	9
1 Rovnice a nerovnice. Analytická geometria	15
1.1 Lineárne rovnice	16
1.2 Kvadratické rovnice	16
1.3 Lineárne nerovnice	17
1.4 Kvadratické nerovnice	18
1.5 Nerovnice s neznámou v menovateli zlomku.....	20
1.6 Základy analytickej geometrie v rovine - rovnica priamky.....	21
1.7 Úlohy a cvičenia	25
2 Vektory. Matice. Determinanty	27
2.1 Vektory	29
2.2 Matice	32
2.3 Determinanty	35
2.4 Aplikačné úlohy.....	37
2.5 Úlohy a cvičenia	39
3 Sústavy lineárnych rovníc.....	43
3.1 Gaussova eliminačná metóda	45
3.2 Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou inverznej matice	47
3.3 Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou determinantov	48
3.4 Aplikačné úlohy.....	48
3.5 Úlohy a cvičenia	52
4 Funkcia jednej reálnej premennej	55
4.1 Cyklometrické funkcie a ich vlastnosti.....	58
4.2 Oblasť definície funkcie	60
4.3 Inverzná funkcia	63
4.4 Vlastnosti a grafy vybraných funkcií.....	64
4.5 Funkcie v aplikačných úlohách	70
4.6 Úlohy a cvičenia	71
5 Limita funkcie jednej reálnej premennej	73
5.1 Výpočet rôznych typov limity funkcie	76
5.2 Výpočet jednostrannej limity funkcie sprava a zľava	77
5.3 Asymptoty grafu funkcie	80
5.4 Aplikačná úloha.....	82

5.5	Úlohy a cvičenia	83
6	Derivácia funkcie jednej reálnej premennej	85
6.1	Derivovanie rôznych typov reálnych funkcií	88
6.2	Derivácia zloženej funkcie	90
6.3	Dotyčnica ku grafu funkcie	91
6.4	Derivácie vyšších rádov	94
6.5	Monotónnosť funkcie a lokálne extrémny funkcie	95
6.6	Konvexnosť, konkávnosť funkcie a inflexné body funkcie	98
6.7	Priebeh funkcie	101
6.8	Vybrané aplikácie derivácie funkcie	107
6.9	Úlohy a cvičenia	109
7	Neurčitý integrál	113
7.1	Integrovanie rozkladom – pomocou vzorcov	115
7.2	Substitučná metóda	116
7.3	Integrovanie metódou per partes	118
7.4	Integrovanie racionálnych lomených funkcií	120
7.5	Integrovanie goniometrických funkcií	122
7.6	Aplikačné úlohy	123
7.7	Úlohy a cvičenia	125
8	Určitý integrál	129
8.1	Výpočet určitého integrálu vybranými metódami	131
8.2	Aplikácie určitého integrálu	134
8.3	Úlohy a cvičenia	138
9	Funkcia dvoch reálnych premenných	141
9.1	Oblasť definície funkcie	144
9.2	Limita funkcie dvoch reálnych premenných	145
9.3	Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných	146
9.4	Rovnica dotykovej roviny k ploche	147
9.5	Parciálne derivácie vyšších rádov funkcie dvoch premenných	148
9.6	Lokálne extrémny funkcie dvoch premenných	151
9.7	Viazané extrémny funkcie dvoch premenných	154
9.8	Aplikačné úlohy	157
9.9	Úlohy a cvičenia	159
10	Diferenciálne rovnice	163
10.1	Základné pojmy o diferenciálnych rovniciach	164
10.2	Diferenciálna rovnica prvého rádu	166
10.2.1	Separovaná diferenciálna rovnica 1. rádu	166
10.2.2	Separovateľná diferenciálna rovnica 1. rádu	169
10.2.3	Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu	171

10.3	Diferenciálna rovnica vyššieho rádu	175
10.3.1	Diferenciálna rovnica vyššieho rádu, u ktorej sa dá znížiť rád postupným integrovaním	175
10.3.2	Lineárna diferenciálna rovnica vyššieho rádu s konštantnými koeficientmi bez pravej strany.....	176
10.4	Aplikačné úlohy	179
10.5	Úlohy a cvičenia	183
11	Teória pravdepodobnosti	185
11.1	Kombinatorika v úlohách	187
11.2	Klasická a podmienená pravdepodobnosť	189
11.3	Opakované pokusy a Bernoulliho schéma.....	192
11.4	Úplná pravdepodobnosť a Bayesov vzorec	193
11.5	Úlohy a cvičenia	195
12	Testy	197
	Vedomostný test 1	197
	Vedomostný test 2	198
	Vedomostný test 3	199
	Vedomostný test 4	200
	Vedomostný test 5	201
	Vedomostný test 6	202
	Vedomostný test 7	203
	Vedomostný test 8	204
	Vedomostný test 9	205
	Vedomostný test 10	206
	Vedomostný test 11	207
	Literatúra a elektronické zdroje	208



ÚVOD

Študenti Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre sa pripravujú v rôznych študijných programoch na bakalárskom, inžinierskom a doktorandskom stupni štúdia. Profesionálne uplatnenie absolventov univerzity je nasmerované do mnohých oblastí spoločenskej praxe, vedy a výskumu. V študijných programoch na jednotlivých fakultách sú zaradené povinné aj nepovinné matematické predmety, ktorých obsahová náplň je stanovená v súlade s požiadavkami fakúlt a odborných katedier. Aplikačné úlohy sú zamerané na hlavné oblasti, ku ktorým patrí ekonómia, technika, chémia, biometrika, manažment a marketing, finančná a poisťná matematika, matematické modelovanie, optimalizácia, operačná analýza a ďalšie. Možnosti variácie aplikačných úloh potvrdzujú význam a použiteľnosť matematických metód.

Obsahová náplň učebnice *Matematika s aplikáciami*, 3. časť je navrhnutá v zhode s aktuálnymi osnovami študijných predmetov z matematiky, ktoré sa vyučujú na Fakulte ekonomiky a manažmentu, Technickej fakulte, Fakulte biotechnológie a potravinárstva a na Fakulte európskych štúdií a regionálneho rozvoja SPU v Nitre. Do obsahu učebnice bolo zaradených jedenásť kapitol, ktoré sú ďalej rozčlenené na podkapitoly. V úvode každej kapitoly je zhrnutie teoretického základu, ktorý je potrebný na štúdium danej problematiky. Sú tu uvedené hlavné pojmy, presné formulácie definícií a matematických viet. Praktickú časť učebnice v každej kapitole tvoria príklady s podrobným postupom riešenia a vysvetľujúcim slovným komentárom. Každá kapitola obsahuje zadania úloh s výsledkami, ktoré sú hlavnou náplňou pre praktické cvičenia počas semestra a slúžia aj na samostatné štúdium. V závere učebnice je dvanásť kapitola, ktorá obsahuje testovacie úlohy s výberom odpovedí, ktoré sú pre študentov užitočným nástrojom na overenie si získaných vedomostí z matematiky. Vysvetľované témy sú doplnené a ilustrované obrázkami, grafmi a tabuľkami.

Pedagógovia z Katedry matematiky FEM SPU v Nitre sa rozhodli pripraviť túto učebnicu na základe vyjadrenia študentov, ktorí majú záujem o štúdium matematiky a chcú sa na skúšku z matematiky zodpovedne pripraviť. Práve z tohto dôvodu učebnica obsahuje mnoho príkladov a zadaní úloh, ktoré sú základom pre zvládnutie matematického učiva a pre úspešné vykonanie skúšky. Teoretická časť je v stručnejšej podobe, pretože je podrobne spracovaná v učebniciach pre študentov SPU v Nitre *Matematika s aplikáciami*, 1. časť (vydaná v roku 2013) a *Matematika s aplikáciami*, 2. časť (vydaná v roku 2014).

V súčasnej dobe je záujem o štúdium na univerzitách evidovaný stále vo vysokých počtoch študentov. Absolventi stredných škôl prichádzajú na univerzity z rôznych typov stredných škôl a s odlišnými vedomosťami zo stredoškolskej matematiky. Skúsenosti učiteľov matematiky a výsledky vstupných testov poukazujú na rozdiely vo vedomostiach študentov. Riešením úloh z prednášok, seminárov a cvičení a samostatným štúdiom prostredníctvom predloženej učebnice si študenti môžu upevniť vedomosti z matematiky a rozšíriť ich o zaujímavé možnosti aplikácie.

Učebnicu recenzovali prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc. a doc. RNDr. Monika Božíková, PhD., ktorým ďakujeme za cenné pripomienky a odporúčania, ktorými prispeli k zvýšeniu kvality tejto publikácie.

V Nitre, júl 2019

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
vedúca Katedry matematiky

Názov: MATEMATIKA S APLIKÁCIAMI
3. ČASŤ

Autori: doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
RNDr. Mária Farkašová, PhD.
Mgr. Radomíra Hornyák Gregánová, PhD.
PaedDr. Tomáš Pechočiak, PhD.
Mgr. Vladimír Matušek, PhD.
Mgr. Norbert Kecskés, PhD.
Ing. RNDr. Janka Drábeková, PhD.

Typ publikácie: učebnica určená pre študentov SPU v Nitre
Vydavateľ: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre
Rok vydania: 2023
Vydanie: druhé nezmenené
Vytlačené: september 2023
Náklad: 80 kusov
Počet strán: 210
AH -VH: 8,41-8,70
Tlač: Vydavateľstvo SPU v Nitre

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou vo vydavateľstve.
Za odbornú a obsahovú náplň publikácie zodpovedajú autori.

Táto publikácia bola vytlačená na ekologickom papieri.



ISBN 978-80-552-2638-5